OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 5

Kalmanov filtar

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Dizajniraju optimalni estimator stanja za kontinualne LTI sisteme (Kalmanov filtar)
- Odrede Kalmanovo pojačanje i kovarijacionu matricu greške u estimaciji stanja simulacijom Rikatijeve jednačine
- Dizajniraju optimalni opserver poremećaja i interpretiraju njegove karakteristike u frekvencijkom domenu
- Izvrše simulaciju Kalmanovog filtra u Matlab-u/Simulinku-u

Model sistema

Posmatrajmo linearni sistem opisan u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t).$$

U prethodnom modelu smatraćamo da je signal $\mathbf{u}(t)$ deterministički i da je poznat (upravljački signal), dok su signali $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ slučajni signali.

Prva jednačina se naziva jednačina stanja, pa se šum $\mathbf{w}(t)$ često zove procesni šum. Ovaj šum predstavlja model spoljnih poremećaja koji djeluju na sistem, a koji su nepoznati. Pored toga procesnim šumom se mogu modelovati i greške u poznavanju modela sistema, kako i nemodelovana dinamika.

Druga jednačina je jednačina mjerenja, te se stoga šum $\mathbf{v}(t)$ naziv mjerni šum. Njime se modeluju greške koje nastaju prilikom mjerenja, koje su neizbježne.

Cilj Kalmanovog filtra je da izvrši estimaciju stanja $\mathbf{x}(t)$ na osnovu dostupnih mjerenja. Estimirana stanja se najčešće označavaju sa $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ i ona predstavljaju izlaz i Kalmanovog filtra.

Model sistema

Prilikom izvođenja Kalmanovog filtra, potrebno je usvojiti nekoliko pretpostavki:

- Par ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) je detektabilan
- Šumovi $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ su bijeli Gausovi šumovi srednje vrijednosti 0 (centrirani) i varijanse $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$, respektivno:

$$E\left[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t+\tau)^T\right] = \mathbf{Q}\delta(\tau),$$
$$E\left[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(t+\tau)^T\right] = \mathbf{R}\delta(\tau),$$
$$E\left[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}(t+\tau)^T\right] = \mathbf{0}.$$

  Zadnja jednačina ima značenje da su šumovi $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ statistički nezavisni. Ona je uvedena radi jednostavnosti izvođenja, mada moguće je izvesti i Kalmanov filtar pod pretpostavkom da su ova dva šuma korelisana.

- Matrica $\mathbf{R}$ je invertablna

Model sistema

Napomene:

- Iako se Kalmanovi filtri mogu primijeniti na nestacioanarne sisteme, smatraćemo da su i sistem i šumovi stacionarni. Odnosno, matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ se ne mijenjaju tokom vremena.
- Srednja vrijednost šuma se naziva bajas i podrazumijeva se da je poznata. Ukoliko bajas postoji, tada ga je potrebno oduzeti od šumova $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ kako bi se zadovoljila pretpostavka o srednjoj vrijednosti. Na primjer, ako je srednja vrijednost šuma $\mathbf{w}(t)$ jednaka $\mathrm{E}[\mathbf{w}(t)]$, tada se Kalmanov filtar dizajnira za model:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ E[\mathbf{w}(t)] \end{bmatrix} + \mathbf{M}\big(\mathbf{w}(t) - E[\mathbf{w}(t)]\big), \\
y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) + \mathbf{v}(t).
\end{aligned}
$$

Ukoliko je srednja vrijednost šuma nepoznata, tada je i nju mogući estimirati. Naime, tada se srednja vrijednost modeluje kao izlaz iz integratora čije je početno stanje nepoznato.

Struktura nepomjerenog estimatora

Kalmanov filtar je dinamički sistem koji ima dva ulaza: deterministički signal $\mathbf{u}(t)$ i izmjereni signal $\mathbf{y}(t)$. Izlaz iz ovog filtra je stanje $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ koje predstavlja estimaciju stanja $\mathbf{x}(t)$.

Kalmanov filtar se u prostoru stanja opisuje sljedećim jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_f\hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix}\mathbf{B}_f & \mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{A}_f\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_f\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t).\end{aligned}$$

Naravno, ovaj filter se inicijalizuje sa $\widehat{\mathbf{x}}(0)$ koje predstavlja estimaciju stanja sistema u početnom trenutku.

Ako označimo grešku u estimaciji sa $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)$, tada se nakon oduzimanja jednačina filtra od jednačina sistema dobija:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{w} - \mathbf{A}_f\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}_f\mathbf{u} - \mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{v})\\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x} - \mathbf{A_f}\hat{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{B}_f - \mathbf{K}\mathbf{D}\right)\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{w} - \mathbf{K}\mathbf{w}\\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e} + \left(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{A}_f\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{D} - \mathbf{B}_f\right)\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{w} - \mathbf{K}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Struktura nepomjerenog estimatora

Kako su šumovi $\mathbf{w}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ Gausovi, a posmatrani sistem linearan, tada će i greška $\mathbf{e}(t)$ biti Gausov slučajni signal.

Kalmanov estimator treba da bude takav da estimacija stanja bude nepomjerena (bez bajasa) za bilo koju vrijednost signala $\mathbf{u}(t)$ i početne uslove $\widehat{\mathbf{x}}(0)$. Odnosno, očekivana vrijednost greške $\mathbf{e}(t)$ treba da konvergira ka nuli.

Ako primijenimo operator očekivane vrijednosti na izraz za $\dot{\mathbf{e}}$, dobijamo:

$$E[\dot{\mathbf{e}}] = (\mathbf{A} - \mathbf{KC})E[\mathbf{e}] + \left(\mathbf{A} - \mathbf{KC} - \mathbf{A}_f\right)E[\hat{\mathbf{x}}] + \left(\mathbf{B} - \mathbf{KD} - \mathbf{B}_f\right)\mathbf{u}.$$

Kako želimo da estimacija bude nepomjerena, odnosno da važi

$$\lim_{t\to\infty} E\left[\mathbf{e}(t)\right] = 0$$

za svako $\mathbf{u}(t)$ i $\mathrm{E}[\widehat{\mathbf{x}}(0)]$, jasno da moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{KC},$$

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{B} - \mathbf{KD}.$$

Pored toga, matrica ($\mathbf{A}$ - $\mathbf{KC}$) mora biti stabilna.

Struktura nepomjerenog estimatora

Uz prethodno definisane uslove, realizacija Kalmanovog filtra (sa slajda 6) se svodi na sljedeći oblik:

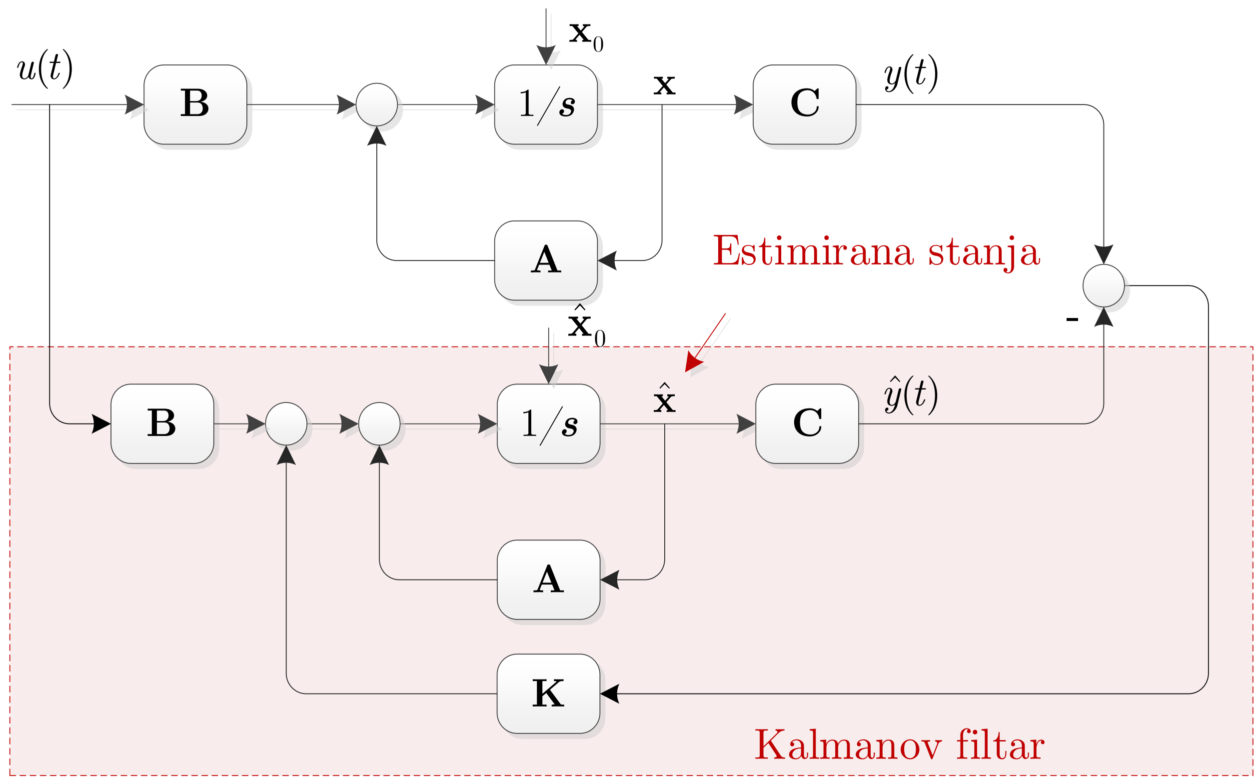
$$\boxed{\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}\left(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u}\right).}$$

Može se uočiti da prvi član estimatora predstavlja deterministički model sistema ($\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$). Ovaj model se koristi za predikciju evolucije stanja sistema (izvoda) na osnovu trenutne estimacije stanja $\hat{\mathbf{x}}$. Predikcija se dodatno ažurira dodavanjem razlike između izmjerenog izlaza $\mathbf{y}$ i predikcije izlaza $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$, pomnožene pojačanjem filtra $\mathbf{K}$. Razlika $\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}$ se često naziva inovacija.

Važno je napomenuti da definisana struktura Kalmanovog estimatora garantuje da će estimacija stanja biti nepomjerena za bilo koje $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, sve dok postoji pojačanje $\mathbf{K}$ takvo da je sistem $\mathbf{A}$ - $\mathbf{KC}$ stabilan. Takvo pojačanje se može uvijek naći pod uslovom da je par ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) detektabilan, odnosno sistem ne smije imati neopservabilna stanja koja su ujedno i nestabilna (prva pretpostavka koja je uvedena).

Struktura nepomjerenog estimatora

Na slici ispod je prikazan blok dijagram Kalmanovog estimatora.



Može se uočiti da Kalmanov estimator (filtar) ima istu strukturu kao standardni Luenbergov opserver.

Estimator minimalne varijanse

Prilikom određivanja pojačanja $\mathbf{K}$ treba uzeti u obzir stepen „povjerenja“ koje imamo u model sistema i stepen „povjerenja“ koje imamo u mjerenja. Povjerenje u model sistema se izražava preko kovarijanse procesnog šuma $\mathbf{Q}$: ako je model precizniji (i sistem nije izložen spoljnim poremećajima) tada $\mathbf{Q}$ ima manju vrijednost, i obrnuto. Slično, ako su mjerenja precizna tada konvarijansa mjernog šuma $\mathbf{R}$ ima malu vrijednost.

Ukoliko je model precizan (malo $\mathbf{Q}$), a mjerenja prilično zašumljena (veliko $\mathbf{R}$) tada pojačanje $\mathbf{K}$ treba da ima malu vrijednost. Ovo znači da ćemo se više oslanjati na predikciju stanja na osnovu modela, nego na inovaciju na osnovu mjerenja.

U suštini, među svim pojačanjima $\mathbf{K}$ koja stabiliziju sistem potrebno je odabrati ono koje **minimizuje varijansu greške** $\mathbf{e}(t)$ $\forall t$ (ili sumu varijansi svakog elementa, ukoliko je $\mathbf{e}(t)$ vektor).

Pronalaženje optimalnog pojačanja olakšava činjenica da je greška u estimaciji $\mathbf{e}(t)$ zapavo bijeli Gausov šum srednje vrijednosti nula, i da su procesni i mjerni šum nekorelisani.

Estimator minimalne varijanse

Dakle, potrebno je odrediti $\mathbf{K}$ koje minimizuje sljedeću funkciju performanse:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{n} E\left[e_i(t)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t)\right] \\ &= \mathrm{trace} E\left[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t)^T\right] = \mathrm{trace}\mathbf{P}(t). \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu

$$\mathbf{P}(t) = E\left[\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right)\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right)^T\right]$$

predstavlja kovarijacionu matricu greške u estimaciji. Trag matrice (trace) se definiše kao suma elemenata matrice na glavnoj dijagonali.

Ako se uzme u obzir usvojena struktura nepomjerenog estimatora (slajd 8), tada se izraz za dinamiku greške u estimaciji (sa slajda 6) može zapisati na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{e}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}\right)\mathbf{e} + \mathbf{M}\mathbf{w} - \mathbf{K}\mathbf{v}.$$

Estimator minimalne varijanse

Prilikom izvođenja optimalnog vektora **K** treba uzeti u obzir da su procesni i mjerni šum nezavisni, odnosno da važi:

$$E\left[\begin{bmatrix}\mathbf{w}(t)\\ \mathbf{v}(t)\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{w}(t+\tau) & \mathbf{v}(t+\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & 0\\ 0 & \mathbf{R}\end{bmatrix}\delta(\tau).$$

Ako primijenimo teoremu sa prethodnog predavanja, dobija se sljedeća kovarijaciona matrica greške:

$$\dot{\mathbf{P}}=(\mathbf{A}-\mathbf{KC})\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{KC})^T+\begin{bmatrix}\mathbf{M} & -\mathbf{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Q} & 0\\ 0 & \mathbf{R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{M} & -\mathbf{K}\end{bmatrix}^T$$

$$=(\mathbf{A}-\mathbf{KC})\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{KC})^T+\mathbf{MQM}^T+\mathbf{KRK}^T.$$

Optimalno **K** se određuje minimizacijom traga matrice **P**:

$$\mathbf{K}=\frac{\partial trace(\mathbf{P}(t))}{\partial\mathbf{K}}=-\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T-\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T+2\mathbf{KR}$$

$$\boxed{\rightarrow\mathbf{K}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}.}$$

Estimator minimalne varijanse

Uvrštavanjem prethodnog vektora u jednačinu za kovarijacionu matricu se dobija:

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(t) + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T.}$$

Prethodna jednačina predstavlja matričnu Rikatijevu diferencijalnu jednačinu koju je potrebno integraliti od početkog trenutka t_0 do t, za zadatu početnu vrijednost $\mathbf{P}(0)$.

Tri jednačine koje su uokvirene predstavljaju kontinualni Kalmanov filtar. Da bi izračunali Kalmanovo pojačanje $\mathbf{K}(t)$ potrebno je integraliti diferencijalnu Rikatijevu jednačinu za zadato $\mathbf{P}(0)$, odnosno izračunati $\mathbf{P}(t)$. Dobijeno optimalno pojačanje se dalje koristi za predikciju stanja sistema na osnovu modela i mjerenja (prva uokvirena jednačina).

Pojačanje $\mathbf{K}(t)$ se može računati online (u realnom vremenu) ili offline. Ukoliko se računa offline, vektor $\mathbf{K}(t)$ se upload-uje u memoriju računara. Sa praktične tačke gledišta, Kalmanov filtar se mora implementirati na računaru, u diskretnom obliku, pri čemu treba primijeniti neki od poznatih postupaka diskretizacije (Tustin, Euler, ...).

Kalmanov filtar u stacionarnom stanju

Nakon prelaznog procesa, greška u estimaciji postaje stacionaran slučajni signal, odnosno možemo zapisati:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{0}.$$

U stacionarnom stanju $\mathbf{P}$ je konstantna pozitivno definitna matrica i ona predstavlja jedino pozitivno rješenje algebarske Rikatijeve jednačine:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T - \mathbf{PC}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{CP} + \mathbf{MQM}^T = \mathbf{0}.$$

Pojačanje filtra takođe postaje stacionarno: $\mathbf{K} = \mathbf{PC}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}$.

Lako se pokazuje da pozitivnost matrice $\mathbf{P}$ implicira stabilnost Kalmanovog filtra, odnosno, polovi matrice $\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}$ će uvijek imati negativan realni dio.

U literaturi su dostupni postupci za određivanje pozitivnog rješenja algebarske Rikatijeve jednačine. U softverskom paketu Matlab dostupna je komanda *lqe*, koja za zadate matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ kao rezulat vraća kovarijacionu matricu greške $\mathbf{P}$ i Kalmanovo pojačanje $\mathbf{K}$ u stacionarnom stanju. Takođe su dostupne i funkcije *care* i *kalman*.

Podešavanje parametara filtra

Za zadate matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ Kalmanovo pojačanje zavisi od:

- $\mathbf{Q}$ – povjerenja koje imamo u model procesa
- $\mathbf{R}$ – povjerenja koje imamo u mjerenja
- $\mathbf{P}(0)$ – povjerenja koje imamo u inicijalizaciju filtra

Pokazuje se da Kalmanovo pojačanje tokom trajanja prelaznog procesa zavisi samo od **relativnog** odnosa matrica $\mathbf{P}(0)$ i $\mathbf{R}$, dok u stacionarnom stanju ono zavisi od relativnog odnosa matrica $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$. Zaista, može se lako provjeriti da ukoliko matrice $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ pomnožimo tri puta, Kalmanovo pojačanje se neće promijeniti. Međutim, treba imati u vidu da će ovo povećati vrijednost matrice $\mathbf{P}$ u stacionarnom stanju tri puta. Stoga, ukoliko želimo da koristimo $\mathbf{P}(t)$ za analizu kvaliteta estimacije, tada je pomenute matrice potrebno inicijalizovati na stvarne vrijednosti. Tada, vjerovatnoća da se i-to stanje sistema $\mathbf{x}_i(t)$ nalazi između $\hat{\mathbf{x}}_i(t)-2\sqrt{\mathbf{P}_{ii}(t)}$ i $\hat{\mathbf{x}}_i(t)+2\sqrt{\mathbf{P}_{ii}(t)}$ iznosi 0.95 (karakteristika Gausove raspodjele).

Podešavanje parametara filtra

Može se pokazati da bez obzira kakva su inicijalna podešavanja Kalmanovog filtra, kovarijansa estimiranog izlaznog signala ($\mathbf{C}\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) će uvijek biti manja od kovarijanse izmjerenog izlaznog signala ($\mathbf{R}$). Ovo znači da je uvijek bolje koristiti estimirana (filtrirana) mjerenja nego sama mjerenja!

Ispod su data pravila koja su korisna za podešavanje Kalmanovog filtra:

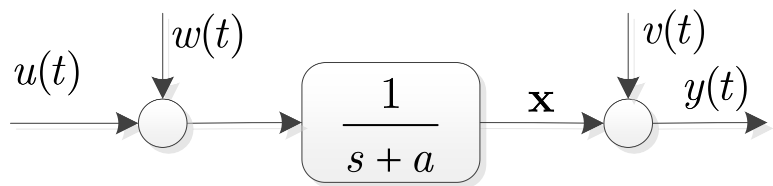
- Uticaj odnosa matrica $\mathbf{P}(0)$ i $\mathbf{R}$: Tokom prelaznog procesa estimacija greške će se ažurirati brže i Kalmanovo pojačanje će biti veće ukoliko je $\mathbf{P}(0)$ veće u odnosu na $\mathbf{R}$. Međutim, estimirana stanja će biti više osjetljiva na šum, jer je veće povjerenje dato mjerenjima.
- Uticaj odnosa matrica $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$: U stacionarnom stanju Kalmanovo pojačanje će biti manje ukoliko je $\mathbf{Q}$ manje u odnosu na $\mathbf{R}$. Međutim, ukoliko na sistem djeluju poremećaji koji nijesu adekvatno modelovani sa $\mathbf{Q}$, tada estimirana stanja $\hat{\mathbf{x}}(t)$ neće dobro pratiti stvarna stanja $\mathbf{x}(t)$. Takođe, tada kovarijansa greške $\mathbf{P}(t)$ nije reprezentativna, odnosno $\mathbf{P}(t)$ ne sadrži informacije o stvarnoj statistici greške.

Primjer – Kalmanov filtar

Sistem prvog reda je opisan funkcijom prenosa:

$$G = \frac{1}{s+a}, a > 0.$$

Mjerenje sistema y je zašumljeno bijelim Gausovim šumom jedinične varijanse. Ulaz sistema je pod uticajem promjenljivog transportnog kašnjenja čija je maksimalna vrijednost T. Za potrebe dizajna Kalmanovog filtra nepoznato kašnjenje se modeluje bijelim Gausovim šumom autokorelacione funkcije $q\delta(t)$, koji je nezavisan od mjernog šuma. Blok dijagram sistema je prikazan na slici ispod.



a) Formirati Kalmanov model i izračunati Kalmanovo pojačanje. Rezultate izraziti u zavisnosti od a, q, i $p(0)$.

b) U Simulink-u modelovati sistem (uključujući transportno kašnjenje) i Kalmanov filtar. Ispitati uticaj parametara q i $p(0)$ na grešku u estimaciji. Za potrebe simulacije usvojiti sljedeće parametre: a=1, $x(0)$=20, $\dot{x}(0)$=0. Razmotiti tri vrijednosti transportnog kašnjenja: T= 0s, 0.1s, 0.5s i 1s. Ulaz je pravougaoni signal amplitude 10 i periode 5s.

Primjer – Kalmanov filtar

Zadati sistem se u prostoru stanja zapisuje na sljedeći način:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t) + w(t)$$
$$y(t) = x(t) + v(t),$$

pri čemu je:

$$E\left[w(t)w(t+\tau)^T\right] = q\delta(\tau), E\left[v(t)v(t+\tau)^T\right] = \delta(\tau), E\left[w(t)v(t+\tau)^T\right] = 0.$$

Prvi korak u određivanju Kalmanovog pojačanja je rješavanje diferencijalne Rikatijeve jednačine:

$$\dot{p}(t) = 2ap(t) - p(t)^2 + q.$$

Rješenje ove jednačine u stacionarnom stanju se dobija izjednačavanjem izvoda sa nulom, odnosno na osnovu algebarske jednačine:

$$2ap(\infty) - p(\infty)^2 + q = 0,$$

odakle se dobija da je jedino pozitivno rješenje:

$$p(\infty) = -a + \sqrt{a^2 + q}.$$

Diferencijalna Rikatijeva jednačina se može riješiti i analtički. Njeno rješenje je (postupak rješavanja je izostavljen):

$$p(t) = p(\infty) - \frac{k(p(0) - p(\infty))}{e^{kt}(p(0) - p(\infty) + k) - p(\infty) + p(0)}.$$

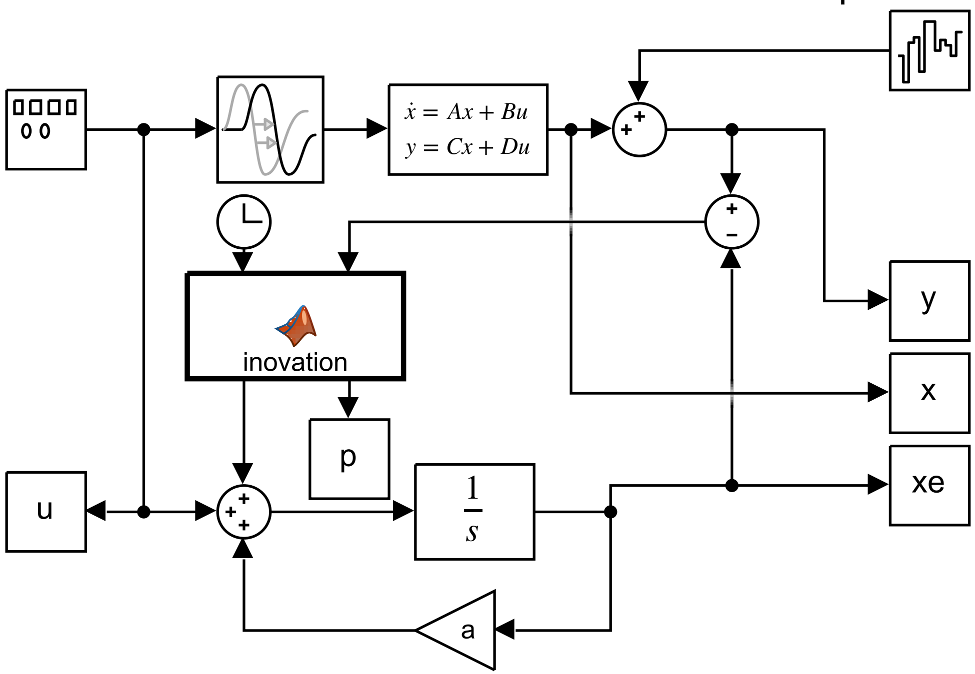
Primjer – Kalmanov filtar

Konačno, Kalmanovo pojačanje je jednako:

$$K(t) = p(t).$$

Ako usvojimo da je $q = 0$, tada je $p(\infty) = -a + |a|$. Može se uočiti da će za $a > 0$ $K(\infty)$ biti jednako 0. Kako je sistem stabilan za $a > 0$, a pritom $q = 0$, to znači da potpuno vjerujemo modelu sistema i nećemo koristi zašumljena mjerenja, odnosno $K(\infty) = 0$. Sa druge strane, za $a < 0$ sistem je nestabilan, pa je u ovom slučaju $K(\infty) = -2a$. Ovo pojačanje zapravo predstavlja ono pojačanje koje stabilizuje sistem, a pritom i minimizuje varijansu greške u estimaciji.

Ispod je prikazan Simulink model sistema i KF-a za zadate parametre.

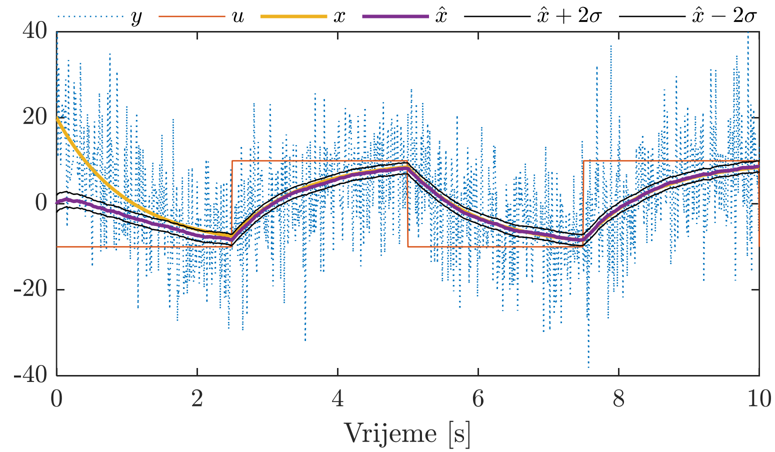


Primjer – Kalmanov filtar

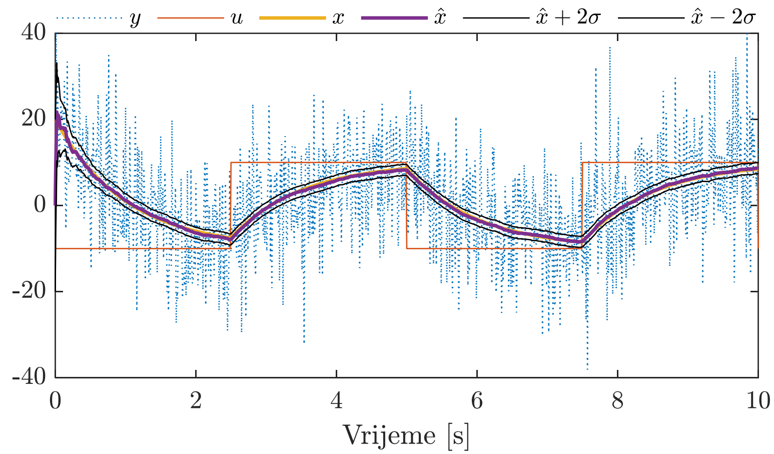
Na slikama desno su prikazani rezultati simulacija za različita podešavanja Kalmanovog filtra.

U prvom primjeru, prikazanom na gornjoj slici početna vrijednost kovarijanse greške p_0 nije adekvatno odabrana, jer je razlika između početnog stvarnog i estimiranog stanja jednaka 20. To znači se stvarno stanje neće nalaziti unutar intervala povjerenja $x \pm 2\sigma$, odnosno da kovarijansa greške $p(t)$ nije statistički reprezentativna. Sa druge strane, u stacionarnom stanju estimacija je dobra, jer se ona oslanja na model koji je precizan (T=0).

U drugom primjeru je usvojeno p_0=100, pa se u toku prelaznog procesa više oslanjamo na mjerenja, i samim tim imamo bolju estimaciju. Međutim može se uočiti da je estimirana vrijednost zašumljena.



$$p_0 = 1,\ q = 1,\ T = 0$$



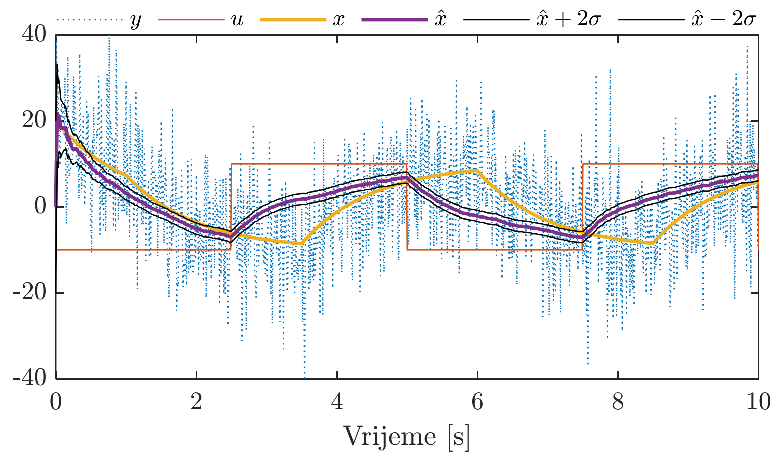
$$p_0 = 100,\ q = 1,\ T = 0$$

Primjer – Kalmanov filtar

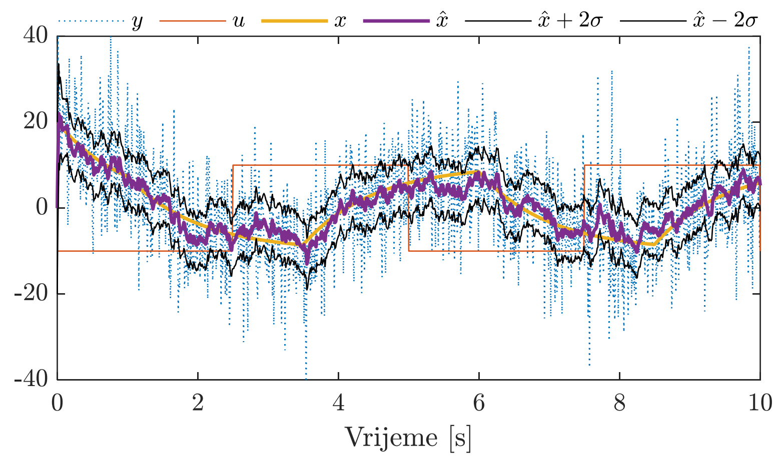
U trećem primjeru je uzeto da je p_0=100 i T=1. Iako u toku trajanja prelaznog procesa imamo dobru estimaciju, u stacionarnom stanju estimacija nije dobra, je parametar q nije adekvatno odabran. Tj. u velikoj mjeri se oslanjamo na usvojeni model koji nije tačan.

Jedan način da poboljšamo estimaciju kada model nije dobar je da povećamo vrijednost parametra q. Upravo, u četvrtom primjeru je usvojeno q=100. Može se uočiti da estimirana stanja brže prate stvarna stanja, ali zbog većeg povjerenja u mjereni signal, estimirana stanja su zašumljena (mada značajno manje u odnosu na mjereni signal).

Kada je transportno kašnjenje unaprijed poznato, tada se ono pomoću Pade-ove transformacije može linearizovati i uključiti u model.



$p_0 = 1,\ q = 1,\ T = 1$



$p_0 = 100,\ q = 100,\ T = 1$

Primjer – estimacija bajasa

Vozilo se kreće duž x-ose, pri čemu se mjere njegova brzina i trenutna pozicija. Mjerenje pozicije je zašumljeno bijelim centriranim Gausovim šumom autokorelacione funkcije $\delta(t)$, dok kod mjerenja brzine postoji bajas koji se modeluje step funkcijom $b(t)$, nepoznate amplitude b_0:

$$x_m(t) = x(t) + v(t),$$

$$v_m(t) = \dot{x}(t) + b(t).$$

a) Forimirati Kalmanov model i izračunati Kalmanovo pojačanje.

b) U Simulink-u simulirati sistem i Kalmanov filtar.

Na osnovu zadatih jednačina može se formirati sljedeći model u prostoru stanja:

$$\dot{x}(t) = -b(t) + v_m(t),$$

$$x_m(t) = x(t) + v(t).$$

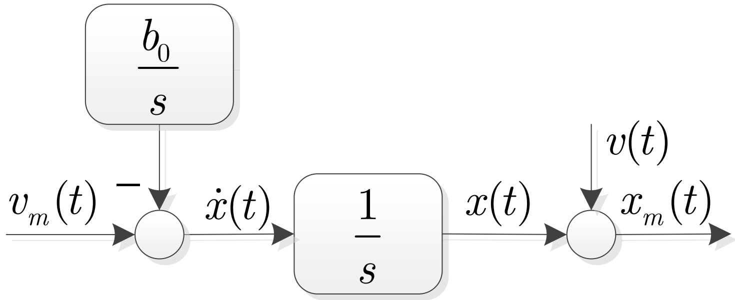
Bajas se može modelovati kao kao izlaz iz integratora čiji je početni uslov jednak 0 ($\dot{b} = 0$), pa se prethodni model može zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_m(t),$$

$$x_m(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + v(t).$$

Primjer – estimacija bajasa

Blok dijagram sistema je prikazan na slici ispod.



Ako bi Kalmanov filtar dizajnirali za prethodni model, Kalmanovo pojačanje u stacionarnom stanju bi bilo jednako nuli, jer ne postoji procesni šum (uopšte se ne oslanjamo ne mjerenja). Samim tim filtar ne bi uspješno estimirao bajas. Da bi prevazišli ovaj problem, bajas se modeluje na sljedeći način:

$$\dot{b} = w(t),$$

gdje je $w(t)$ bijeli Gausov šum autokorelacione funkcije $q^2\delta(t)$. Kalmanov model se dalje zapisuje u sljedećem obliku:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{b}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t),$$

$$x_m(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ b(t) \end{bmatrix} + v(t).$$

Primjer – estimacija bajasa

Može se pokazati da će kovarijaciona matrica u stacionarnom stanju imati vrijedost:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & -q \\ -q & q\sqrt{2q} \end{bmatrix}.$$

Kalmanovo pojačanje je dalje jednako:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & -q \end{bmatrix}^T.$$

Realizacija Kalmanovog filtra u prostoru stanja ima oblik:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{b}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_m(t) + \mathbf{K}\left(x_m(t) - \mathbf{C}\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{b}(t) \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{b}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ v_m(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Brzina se estimira tako što se od mjerenja brzine oduzme estimirani bajas:

$$\dot{\hat{x}}(t) = v_m(t) - \hat{b}(t).$$

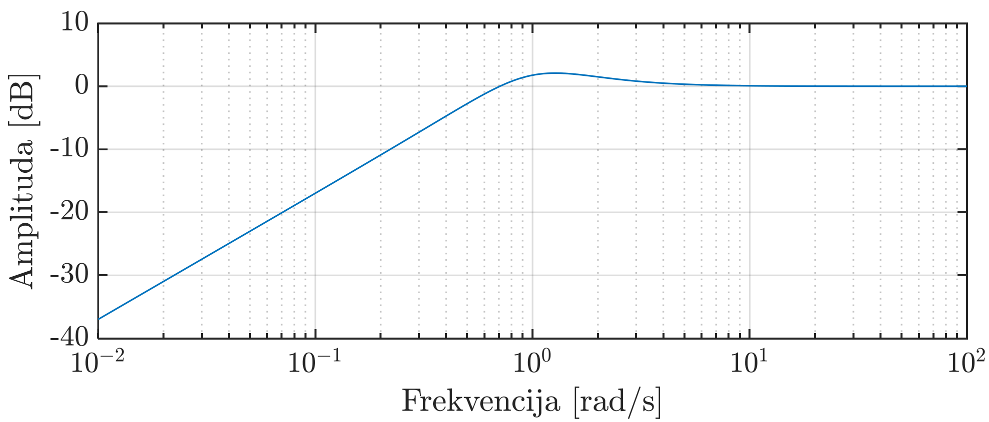
Primjer – estimacija bajasa

Kalmanov filtar se može interpretirati i u frekvencijskom domenu. Na osnovu prethodnog modela u prostoru stanja, može se odrediti funkcija prenosa između estimarane i mjerene brzine:

$$\frac{\hat{\dot{X}}(s)}{V_m(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2q}s}{s^2 + \sqrt{2q}s + q}.$$

Prethodni izraz predstavlja filtar propusnik opsega sa centralnom učestanošću $\sqrt{q}$ i faktorom relativnog prigušenja $\sqrt{q}\,/2$. Filar ima nulto pojačanja na nultoj frekvenciji, što znači da će DC komponenta iz signala $V_m(s)$ biti potpuno filtrirana.

Na slici ispod je prikazana amplitudska karakteristika za q=1.



Primjer – estimacija bajasa

Estimirana pozicija, brzina i bajas prikazani su na slikama lijevo. Može se uočiti da za q=1 bajas brže konvergira stvarnoj ka vrijednosti (2), ali u stacionarnom stanju estimacija je više zašumljena u odnosu na slučaj kada je q=0.05.